EVALUACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Henry Hernando Suárez Soler
Ingeniero mecánico, Magíster en Ingeniería de Materiales y Procesos,
Docente Universidad Autónoma de Colombia. henry.suarez@fuac.edu.co

Néstor Sergio Gutiérrez
Ingeniero mecánico, Magíster en Ingeniería, Magíster en Ciencias Técnicas,
Docente Universidad Autónoma de Colombia.nesergio@gmail.com

Rafael Eduardo Ladino P.
Ingeniero mecánico, Magíster en Desarrollo Rural,
Docente Universidad Autónoma de Colombia.eduardoladino2011@gmail.com

Recibido: 20-09-10, aprobado: 30-11-2010, última versión: 21-11-2010*

RESUMEN

El presente artículo constituye un avance del proyecto de investigación, Evaluación y Comparación de Modelos de Solución a Problemas de Ingeniería, del grupo de Energética de la FUAC. En la formulación de modelos matemáticos para la descripción, simulación y análisis de variedad de fenómenos de interés en el campo de la ingeniería, se tiene predilección por sistemas de ecuaciones diferenciales, cuya validez en determinada región está sujeta a la observancia de condiciones límite o iniciales. No obstante la solución analítica de estos sistemas es posible solo para sus formas más simples o con límites triviales, teniendo por lo tanto que recurrir a soluciones aproximadas de las cuales su conformidad debe ser objeto de evaluación. En este trabajo se presentan y comparan entre sí dos métodos numéricos de aproximación, diferencias finitas y residuos ponderados, aplicados a la solución de modelos de problemas tipo ingeniería representados con ecuaciones diferenciales.

***Palabras clave**: Modelos de ingeniería. Ecuaciones diferenciales. Condiciones límite. Diferencias finitas. Residuos ponderados. Funciones de ensayo.*

ABSTRACT

This article is a preview of the research project, Evaluation and Comparison of Models for Solving Problems of Engineering, Energy Group of the FUAC. In the formulation of mathematical models for description, simulation and analysis of a variety of phenomena of interest in the field of engineering, it has a predilection for systems of differential equations, whose validity in a given region is subject to the enforcement of boundary conditions orinitial. Howeverthe analytical solution of these systems is available only to its mosts impleor trivial limits, thereby having to resort to approximate solutions which conformity must be evaluated. In this paper we present and compare eachapproach about two numerical methods, finite difference and Trial Function-weighted residual forms, applied to solving engineering type problems.

***Keywords**: Engineering Mathematical models. Differential equations. Boundary conditions. Finite difference method. Weighted residual forms. Trial functions.*

* Convocatoria 015 de 2009, grupo de investigación: energética y Universidad Autónoma de Colombia.

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales son ampliamente utilizadas en todas las ramas de ingeniería para modelar fenómenos físicos. Se caracterizan por tener una o más variables dependientes relacionadas con una o más variables independientes. Por lo general están acompañadas de unas condiciones iniciales, como restricciones de frontera o derivadas como condición límite, que delimitan el problema que se plantea.

Se debe conocer si dicho problema tiene solución y también si la solución es única, para evaluar la respuesta se recurre entonces a los procedimientos tradicionales. Existen casos para los cuales no se puede hallar una solución, cuando se tienen geometrías complejas, por lo tanto se debe recurrir a los métodos numéricos para encontrar la respuesta aproximada.

Los métodos numéricos son ampliamente utilizados en la solución de modelos matemáticos, su gran difusión se debe al hecho de que conducen a expresiones algebraicas sencillas muy fáciles de manipular con herramientas computacionales modernas.

En este artículo, para modelos de ecuaciones diferenciales que se pueden resolver analíticamente, se obtendrán también soluciones utilizando diferentes métodos de aproximación numérica, con el objeto de compararlas y evaluar el error que se genera.

2. CASOS DE INGENIERÍA QUE SE PLANTEAN CON ECUACIONES DIFERENCIALES

En ingeniería, variedad de situaciones se modelan con ecuaciones diferenciales, por ejemplo, aplicaciones en: mecánica de sólidos y de fluidos, problemas hidrodinámicos, vibraciones mecánicas, procesos de difusión, comportamiento acústico de los materiales, transferencia de calor, electromagnetismo y otros. Algunos casos restringidos a aplicaciones unidimensionales se describen a continuación.

2.1. Mecánica de sólidos

Los conceptos y las teorías clásicas de la mecánica de sólidos se encuentran formulados en forma diferencial e integral, en la amplia bibliografía disponible acerca del tema. Con el objeto de mostrar la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la modelación de fenómenos físicos, se presentan aquí algunos conceptos básicos.

Cuando se aplica una carga sobre un sólido o una estructura, se inducen esfuerzos que, por lo general, no son uniformes, causando deformaciones o desplazamientos. En estructuras como las armaduras, caracterizadas por elementos cuya longitud prima sobre las otras dos dimensiones, articulados entre si y cargados de forma tal que se pueden considerar sometidos a esfuerzos estrictamente axiales, el modelo matemático que representa su estado es:

$$EA.\frac{d^2u}{dx^2} + F_{(x)} = 0 \tag{1}$$

Donde ***A*** es la sección transversal, ***E*** el módulo de elasticidad del material, ***u*** el desplazamiento, ***x*** la posición respecto a un sistema de referencia y $\boldsymbol{F_{(x)}}$ es la fuerza externa aplicada.

Un modelo similar se formula para representar la deflexión ***y*** de una viga, cuya sección tiene momento de inercia ***I***, que está sometida a una carga externa, que da origen a un momento flector $\boldsymbol{M_{(x)}}$. En este caso la ecuación correspondiente es:

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} - M_{(x)} = 0 \tag{2}$$

Las dos situaciones tienen condiciones de frontera que se presentan como restricciones de desplazamiento en los apoyos.

2.2. Transferencia de calor

Para el problema de conducción de calor unidimensional, la formulación matemática está dada por:

$$k.\frac{d^2\phi}{dx^2}+Q_{(x)}=0 \tag{3}$$

En esta ecuación, k es la conductividad térmica del material (por lo general es una constante), ø es la distribución de temperatura a una distancia x y $Q_{(x)}$ es la generación de calor en el cuerpo. La temperatura en alguna posición se toma como condición inicial del problema.

2.3. Vibraciones mecánicas

Una vibración mecánica es un movimiento que se repite en forma periódica en el tiempo. Son muchas las situaciones físicas en las cuales las partículas o sistemas de cuerpos rígidos poseen un movimiento periódico a causa del sistema de fuerzas externas o de la configuración geométrica. El estudio de las vibraciones mecánicas es importante, debido a que deben mantenerse bajo control, porque condiciones extremas tienen efectos catastróficos sobre máquinas y equipos (Chiang, 1999).

Los sistemas vibratorios pueden ser descritos por modelos matemáticos que además de los parámetros del sistema, consideren las condiciones iniciales y características de las cargas solicitantes. En general el movimiento vibratorio, está representado por uno de los siguientes casos, que tienen en cuenta condiciones de frontera.

Vibración libre sin amortiguamiento:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}+k.x=0 \tag{4}$$

Vibración libre con amortiguamiento:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}+c.\frac{dx}{dt}+k.x=0 \tag{5}$$

Vibración forzada sin amortiguamiento:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}+k.x=F \tag{6}$$

Vibración forzada con amortiguamiento:

$$m.\frac{d^2x}{dt^2}+c.\frac{dx}{dt}+k.x=F \tag{7}$$

En las ecuaciones 4 a 7, m es la masa oscilante con elongación x en el tiempo t, C es el coeficiente amortiguamiento del sistema, k es su rigidez y F es la carga externa de excitación del sistema.

2.4. Procesos de difusión

La difusión se define como el proceso en el cual la materia es transportada a través de la materia (Smith). Es muy importante en los metales debido a las reacciones que involucran movimiento atómico, como en los procesos de carburación o nitruración.

Para algunos casos el modelo es representado con la siguiente expresión:

$$\frac{dC_x}{dt}=\frac{d}{dx}\left(D.\frac{dC_x}{dx}\right) \tag{8}$$

C_x representa la concentración del elemento a la distancia x de la superficie en el tiempo t; D es el coeficiente de difusión del elemento soluto que difunde. Las condiciones de frontera tienen que ver con la concentración inicial del elemento en la superficie.

La solución analítica es el mejor camino para explicar los problemas planteados, pero es difícil de obtener cuando se tienen regiones irregulares (los límites son imposibles de describir matemáticamente), o si los materiales son diferentes o anisotrópicos, en este caso se recurre a métodos numéricos para obtener una solución aproximada.

3. Métodos de aproximación

El objeto de aproximar la solución de ecuaciones diferenciales es encontrar una función o algunos puntos discretos que satisfagan las derivadas en una región dada.

Los métodos numéricos más utilizados se basan en la discretización del espacio, lo que convierte una ecuación diferencial en una expresión algebraica dada por un sistema lineal de ecuaciones, donde las variables que se despejan son los valores solución.

Se han desarrollado técnicas generales que se aplican a las ecuaciones diferenciales como la aproximación por diferencias finitas, los procedimientos que utilizan residuos ponderados y funciones de ensayo o las técnicas de aproximación a partir de funcionales.

Se examina a continuación la aplicación de dos métodos numéricos de aproximación, diferencias finitas y residuos ponderados con funciones de ensayo. Sus soluciones serán objeto de comparación y evaluación.

3.1. Método de diferencias finitas

La técnica de diferencias finitas se basa en hacer aproximaciones que permitan reemplazar las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias finitas, que son expresiones algebraicas, cuyas soluciones se relacionan con puntos específicos en el dominio del problema.

La aplicación del método requiere inicialmente la discretización del dominio del problema en elementos iguales. En el caso unidimensional divide la variable $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{n}$ elementos de longitud Δx, esto da como resultado $\boldsymbol{L+1}$ nudos.

A partir del teorema de Taylor:

$$\phi_{(x_{L+1})} = \phi_{(x_L+\Delta x)} = \phi_{(x_L)} + \Delta x \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=x_L} + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_{x=x_L} + \ldots \tag{9}$$

Se plantea la solución de la derivada en el nudo $\boldsymbol{x=x_L}$ (en adelante se llamará nudo $\boldsymbol{L}$), a partir de las siguientes expresiones:

Para la primera derivada

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_L = \frac{\phi_{L+1}-\phi_L}{\Delta x} \tag{10}$$

Para la segunda derivada

$$\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_L = \frac{\phi_{L+1}-2\phi_L+\phi_{L-1}}{\Delta x^2} \tag{11}$$

Se reemplazan en la ecuación diferencial del problema y se obtiene un sistema lineal de ecuaciones, que se soluciona utilizando la aplicación matricial de las hojas de cálculo disponibles.

Si se tienen en cuenta las condiciones en la frontera se obtiene un sistema de ***n-1*** ecuaciones con ***n-1*** incógnitas. Es conveniente tener en cuenta que el Método Diferencias Finitas da la solución del problema en los puntos de la malla, pero entre punto y punto no hay información, aunque, en este caso se puede hacer una interpolación lineal.

3.2. Funciones de ensayo y residuos ponderados

El método propone como solución para la ecuación diferencial del problema el polinomio:

$$\widehat{\emptyset} = \varphi + \sum_{m=1}^{n} a_m . N_m \tag{12}$$

En el cual $\boldsymbol{n}$ define el tamaño del polinomio, φ es la ecuación de la recta que une las fronteras,

N_m son las funciones de ensayo (deben cumplir con la condición que valgan cero en las fronteras) y a_m son los parámetros de aproximación.

Para evaluar los parámetros de aproximación se minimiza el residual $\boldsymbol{R}$ mediante la integración en el dominio del problema planteado, aquí se utiliza la función de ponderación W_L que tiene la misma forma de las funciones de ensayo:

$$\int_{\Omega} W_L . R . d\Omega = 0 \qquad (13)$$

Los métodos anteriormente descritos se utilizan para comparar el grado de aproximación, respecto a la solución que se obtiene mediante procedimientos analíticos, de algunos problemas formulados con ecuaciones diferenciales, en un dominio específico y sometido a condiciones de frontera.

4. Aplicaciones

4.1. Caso 1

Una comparación inicial presenta la aplicación del método diferencias finitas para aproximar la solución del problema de vibración libre sin amortiguamiento, con derivada como condición límite, dada por la expresión

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \qquad (14)$$

Sujeto a las siguientes condiciones: en ***t=0*** el desplazamiento es ***x=10*** y la velocidad inicial es $\frac{dx}{dt} = 0$

La solución analítica del problema es:

$$x_{(t)} = 10.cos4t \qquad (15)$$

De acuerdo con el método de diferencias finitas, para una discretización $\Delta x = \mathbf{0,1}$ en el dominio ***[0,2]***, se obtienen ***L=21*** nudos. La expresión algebraica que resulta al desarrollar la solución de la ecuación diferencial planteada en un nudo ***L*** está dada por:

$$100.x_{L-1} - 184.x_L + 100.x_{L+1} = 0 \qquad (16)$$

El despliegue de esta expresión a todos los nudos del dominio arroja un sistema lineal de 20 ecuaciones con 21 incógnitas, se introducen las condiciones iniciales planteadas, para llegar finalmente a un sistema con 20 ecuaciones y 20 incógnitas, aquí se soluciona utilizando la aplicación matricial de Excel.

La expresión gráfica de la solución exacta y la aproximación por el método de diferencias finitas en los nudos evaluados se presenta en la figura 1. La curva error está dada por la diferencia entre la solución exacta y la aproximada.

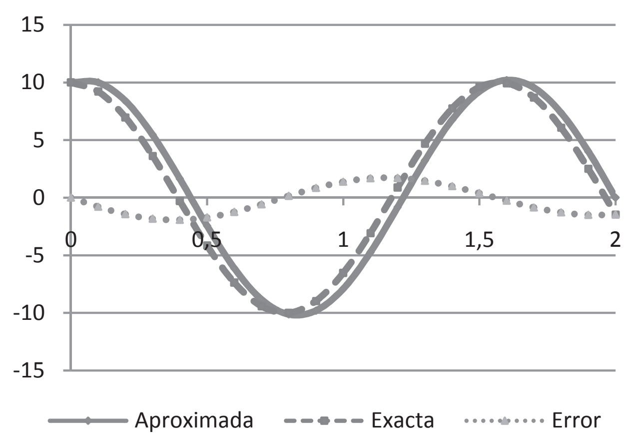

Figura 1
Solución exacta y aproximada del problema planteado, el error esta dado por la diferencia entre las soluciones encontradas

Otra situación para el problema planteado, con condiciones de frontera diferentes, en ***t=0*** el desplazamiento es ***x=10*** y con velocidad inicial igual a $\frac{dx}{dt} = -10$; la solución analítica es:

$$x_{(t)} = 10.cos4t - 2{,}5.sen4t \qquad (17)$$

La aproximación utilizando el método de diferencias finitas, para la misma discretización y en el mismo dominio, conduce a la expresión algebraica planteada en la ecuación 16. El despliegue a todos los nudos evaluados, para las condiciones de frontera planteadas, genera un sistema lineal de ecuaciones que se soluciona en Excel.

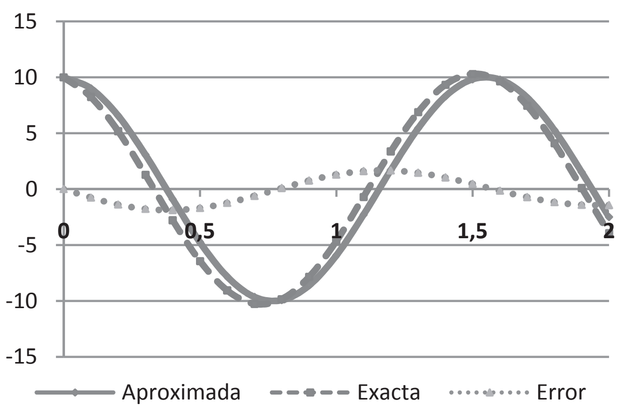

Figura 2
Solución exacta y aproximada para la segunda situación planteada

La expresión gráfica de la solución con el método propuesto y su comparación respecto a la solución analítica se muestra en la figura 2.

4.2. Caso 2

Se comparan los dos métodos propuestos para un problema planteado con condiciones de frontera. En este caso se propone el modelo:

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} - 4.\frac{d\emptyset}{dx} + 4\emptyset = 0 \qquad (18)$$

Con las condiciones límite ***x=0 Φ=0*** y en ***x=1 Φ=1***

La solución exacta para el problema es:

$$\emptyset_{(x)} = \frac{e^{2x}x}{e^2} \qquad (19)$$

La aplicación del método diferencias finitas, para una discretización ***Δx=0.1*** en el dominio ***[0, 1.5]***, la expresión algebraica que se obtiene es:

$$100.\emptyset_{L-1} - 156.\emptyset_L + 60.\emptyset_{L+1} = 0 \qquad (20)$$

De acuerdo con las condiciones de frontera la solución en el nudo ***L=0*** es cero y en el nudo ***L=10*** es 1, el despliegue de la expresión algebraica a todos los nudos del problema arroja un sistema lineal de 14 ecuaciones con 14 incógnitas. La representación gráfica de la solución se muestra en la figura 3.

La aplicación de las funciones de forma y residuos ponderados propone como solución un polinomio de la forma de la ecuación 12. En este caso la ecuación de la recta que une las fronteras es ***φ=x***. Las funciones de ensayo son polinomios de la forma $\boldsymbol{N_m = x^m(1-x)}$

Los parámetros de aproximación se obtienen de la minimización del residual. En este caso se llego a un sistema de 4 ecuaciones para obtener 4 parámetros, a partir de la expresión matricial $[\boldsymbol{K_{LM}}]\{\boldsymbol{a_M}\} = \{\boldsymbol{f_L}\}$, los subíndices ***L*** y ***M*** toman valores desde 1 hasta 4.

Las matrices $\boldsymbol{K_{LM}}$ y f_L están dadas por:

$$K_{LM} = \left[\frac{M(M-1)}{L+M-1} - \frac{4M + M(M+1)}{L+M} + \frac{4(M+2)}{L+M+1} - \frac{4}{L+M+2}\right]$$

$$f_L = 4\left[\frac{1}{L+1} - \frac{1}{L+2}\right] \qquad (21)$$

En la figura 3 se muestran los resultados gráficos de los dos métodos utilizados para aproximar el problema, se hace la comparación con la solución exacta. Es conveniente notar que entre los límites dados por las condiciones de frontera [0,1] se obtiene la mejor aproximación.

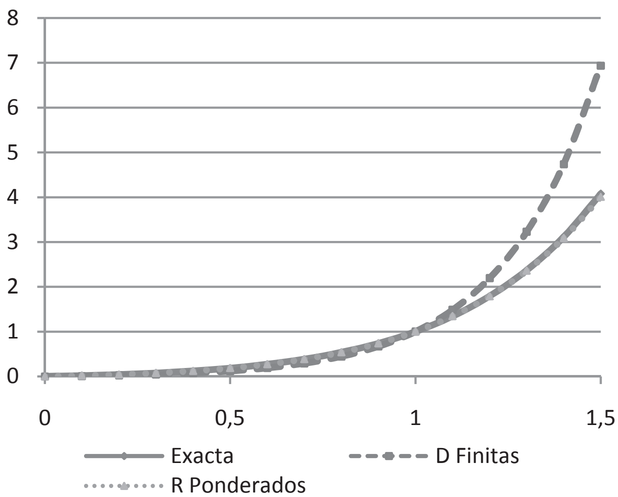

Figura 3
Comparación de las soluciones utilizando los métodos de aproximación planteado, en el dominio [0,1.5]

La evaluación del error respecto a la solución analítica de los dos métodos, en el dominio [0,1] se presenta gráficamente en la figura 4.

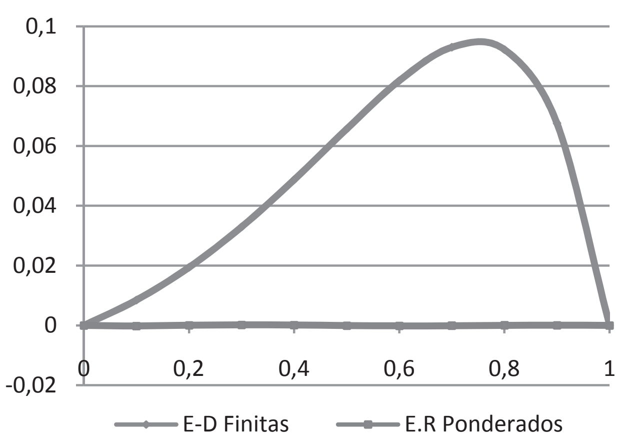

Figura 4
Error de las soluciones aproximadas respecto a la encontrada analíticamente, en el dominio [0,1]

La figura 4 muestra que el error, evaluado en el dominio, es considerablemente más pequeño utilizando el método de residuos ponderados (del orden de 10^{-4}) comparado con el método diferencias finitas (10^{-1}) respecto a la solución exacta. Para valores mayores de uno, el error crece considerablemente y la aplicación de los métodos no es confiable.

CONCLUSIONES

Los métodos de aproximación constituyen una herramienta valiosa para el desarrollo teórico de problemas presentes en ingeniería. Su aplicación requiere de una adecuada formulación del modelo matemático, cualquier error o inconsistencia puede arrojar resultados falsos que no son consistentes con el desarrollo teórico.

Se observa que la aplicación de diferencias finitas cuando se tiene derivada como condición límite genera un error grande, en este caso es conveniente recurrir a otros métodos de aproximación que no se describieron en este artículo.

Para los dos métodos desarrollados se observa que el error es menor cuando se hace la aproximación entre los límites que definen el problema, la evaluación en un dominio mayor al definido presenta un comportamiento con un error significativo.

Las herramientas computacionales modernas se convierten en una ayuda valiosa para acelerar los procesos de investigación relacionados con el tema propuesto, facilitan la exploración de alternativas en este campo.

Se hizo una revisión inicial de los métodos propuestos, en ningún momento se puede afirmar que sean aplicables a todos los casos que se planteen, por lo tanto es conveniente continuar con la evaluación aplicando la metodología a situaciones diferentes.

REFERENCIAS

ALFARO, Víctor (2005). *Métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Universidad de Costa Rica.

CHIANG, Luciano (1999). *Análisis dinámico de sistemas mecánicos.* México. Alfaomega Grupo Editorial.

DETURCK, Dennis y HERBERT Wolf (2002). *Lecturesonnumericalanalysis.* Universidad de Pensilvania, Filadelfia.

ESCOBAR, Jaime. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones en Maple.* Publicación Universidad de Antioquia.

HUSTY, Manfred (2006). *Algebraic methods in mechanism analysis and synthesis*. Institute of basic sciences and engineering.Universtiy Innsbruck. Austria.

KRODKIEWSKI, J.M (2008). *Mechanical vibration*. Department of mechanical and manufacturing engineering. The University of Melbourne. Australia.

LIU, G. R. y Quek, S. S. (2003). *The Finite Element Method, a practical course*. EE.UU. Butterworth Heinemann.

LEVEQUE, Randall (2005). *Finite difference methods for differential equations*. Draft version. University of Washington. EU.

MATTHEWS, K. R. (1998). *Elementary linear algebra.* Department of mathematics.University of Queensland.

PUJOL Toni, Joaquim FORT, Jisep GONZÁLEZ, Lino MONTORO y Marc PELEGRÍ (2006). *Análisis comparativo sobre la utilización de diferentes métodos numéricos en la determinación de los frentes y los pulsos de combustión*. Escuela Politécnica Superior, Girona, Italia.

SMITH, William (1998). *Fundamentos de la ciencia e ingeniería de materiales*. España. McGraw Hill.

SUÁREZ LÓPEZ, Alberto (2006). *Métodos numéricos*. Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica en Informática. Publicación Universidad de Oviedo. España.

ZILL, Dennis (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.* Colombia. Grupo Editorial Iberoamérica. Zienkiewicz y Morgan (1983). *Finiteelements and approximation*. John Wiley&sons. Singapore.