

MODELAMIENTO, DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA UN SISTEMA DE PÉNDULO DOBLE INVERTIDO. (SPDI)

GERMÁN VELANDIA PELÁEZ*

Resumen:

En este artículo se presenta el modelamiento matemático, el diseño y simulación de un sistema de control para un sistema de péndulo doble invertido, (SPDI), de modo que pueda mantenerse en la posición vertical invertida ante posibles perturbaciones, de acuerdo con la propuesta de proyecto de tesis de maestría en ingeniería electrónica. El modelamiento matemático se fundamenta en las ecuaciones de Euler-Lagrange encontradas especificando el lagrangiano como la diferencia de la energía cinética y la energía potencial del sistema de péndulo doble invertido montado en un carrito que se desplaza en un riel horizontal, obteniendo un sistemas de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se transforman a un formato de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. La estrategia de control seguida ha sido la de un sistema de control óptimo que minimiza un funcional de costo cuadrático probando un regulador lineal cuadrático (LQR). La simulación presenta un adecuado desempeño para el sistema de LQR, alrededor del punto de operación del sistema: posición vertical invertida del péndulo doble; ante desviaciones de dicha posición. La simulación igual nos presenta un comportamiento tanto del modelo linealizado, como del modelo no lineal totalmente aceptable.

Palabras claves: Grados de libertad (DOF), Sistema de péndulo doble invertido (SPDI), Modelo no lineal (MNL), Modelo linealizado (ML). Control óptimo.

1.- INTRODUCCIÓN

1.1.- Presentación

Nos proponemos con este trabajo la aplicación de los conocimientos adquiridos en los diversos estudios correspondientes a la maestría en ingeniería electrónica, en lo que se refiere a análisis y diseño de sistemas de control, por ello elegimos como sistema de estudio un sistema de péndulo doble invertido (SPDI). El SPDI representa un problema muy interesante desde el punto de vista de control ya que permite involucrarnos en varias de las dificultades asociadas con los problemas de control de los sistemas dinámicos, a su vez presenta particular interés académico, porque permite la aplicación de diversas técnicas de control e ilustrar su comportamiento.

El péndulo simple invertido (PSI) es usado en laboratorios de control para demostrar la efectividad de los sistemas de control en analogía con el control de muchos sistemas reales, [1], [2] dada la conveniencia en investigar y verificar diferentes métodos de control para sistemas dinámicos con no-linealidades de orden superior. Controlar del SPDI, además de considerar el desplazamiento del carrito, exige considerar la dinámica de dos péndulos y esto aumenta la complejidad del problema.

El SPDI es un sistema dinámico sub-actuado que tiene menos entradas de control que grados de libertad (DOF). Hay muchos sistemas similares al SPDI, como el Acrobot, el Pendubot, el robot de gimnasta de tres-eslabones, el péndulo triple invertido, etc. El SPDI también es diferente del péndulo invertido doble rotante. El SPDI pertenece a la clase de sistemas mecánicos sub-actuados que consiste en tres sistemas interconectados (dos péndulos y un carrito) con un sólo actuador: una fuerza usada para controlar tres grados de libertad.

1.2.- El Sistema de Péndulo Doble Invertido

Desde la década de los 70, la dinámica y control de péndulos invertidos ha llamado mucho la atención. Existe una bibliografía extensa sobre estabilización [10] de péndulos simple [6], [7], de péndulos dobles [1], [3], [4], y péndulos triples [5] invertidos. Hay varios estudios sobre el swing-up (balanceo-arriba) de un péndulo simple invertido y del péndulo doble invertido [5], [7].

Desde la década anterior la dinámica y control de mecanismos sub-actuados ha estado bajo investigación. Algunos trabajos

* Profesor Universidad Autónoma de Colombia, Magíster en Ingeniería Electrónica g-veland@uniandes.edu.co

interesantes se han llevado a cabo en los manipuladores sub-actuados [8], [9] y robots sub-actuados tales como el Acrobot [11] y el Pendubot [12]. Estos trabajos muestran el control de posición de las juntas pasivas vía su acoplamiento dinámico con las activas. Hay varios estudios sobre trayectorias de optimización para los robots industriales [13], [14], y muchos otros sistemas totalmente actuados. Estos estudios usan métodos de disparo y colocación así como la optimización cuadrática [15] para obtener la solución óptima del problema de las condiciones de frontera. Algunos de estos estudios también se han extendido a los sistemas sub-actuados [16], [17] y han tenido éxito con ejemplos como el dos-DOF Acrobot, una cadena simple echada y un siete-DOF el buzo humano.

El sistema de péndulo doble invertido es un sistema sub-actuado. Tiene un grado de libertad (DOF) actuado y dos DOF's no actuados. Es diferente de todas las plantas mencionadas antes, dado que tiene dos coordenadas pasivas generalizadas, que hace de él un desafío real para diseñar controladores.

1.3.- Objetivos

El procedimiento para el diseño de un sistema de control para un sistema dinámico, se basa esencialmente en dos aspectos: el primero es el análisis del comportamiento del sistema dinámico y el segundo es la síntesis del controlador. En el análisis de sistemas dinámicos se busca verificar diferentes propiedades del sistema, en especial lo que tiene que ver con la estabilidad. El proceso de síntesis apunta a la obtención de un controlador que cumpla con determinadas condiciones y garantice el desempeño deseado del sistema dinámico. En ambas situaciones se requiere el uso de un modelo o estructura matemática que formule la dinámica del sistema dinámico de manera apropiada, o sea, que represente el comportamiento de las variables de interés del la manera mas cercana (confiable) a su comportamiento real.

Por ello nos hemos propuesto los siguientes objetivos:

Objetivo general. El objetivo principal es el modelamiento matemático, el diseño y simulación de un sistema de control para el sistema del péndulo doble invertido SPDI, de modo que pueda mantenerse en una posición vertical invertida ante posibles perturbaciones.

Objetivos específicos:

1. Reconocer el estado del arte del problema en el control de un péndulo doble invertido.
2. Realizar el modelamiento matemático del péndulo doble invertido.
3. Especificar requerimientos de diseño.
4. Proponer un método de control por optimización cuadrática para el péndulo doble invertido
5. Validar el modelo matemático y sistema de control por medio de simulación.

2.- MODELAMIENTO MATEMÁTICO DEL SISTEMA

2.1.- Descripción del Sistema

El sistema péndulo doble invertido es un sistema no lineal e inestable. En condiciones de su posición de equilibrio inestable (posición vertical), el péndulo doble se encuentra sin los elementos necesarios para mantener los brazos verticalmente. El SPDI consiste en dos péndulos montados en un carrito. Cada péndulo gira en el plano vertical sobre el eje de una junta articulada, definiendo dos DOFs, $\theta_{1(t)}$ y $\theta_{2(t)}$ (Fig. 2.1). No hay torque aplicado en el eje de $\theta_{1(t)}$ y de $\theta_{2(t)}$ que son dos juntas pasivas. El carrito se maneja en un riel por un actuador que ejerce una fuerza U (Fig. 2.1) a lo largo del DOF de traslación x . Se considerará solamente el problema en forma bidimensional en el que el sistema de péndulo doble invertido se mueve exclusivamente en el plano XY.

El primer péndulo tiene una masa m_1 y una longitud L_1 , el segundo péndulo tiene una masa m_2 y una longitud L_2 . La masa de cada péndulo se considera uniformemente distribuida a lo largo de su longitud, por lo tanto se asume concentrada en el centro de masa de cada brazo, ubicado en la mitad de la longitud de cada brazo del péndulo. Tal y como se ilustra en la figura 2.1

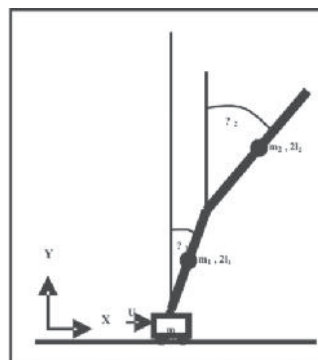


Figura 2.1: Sistema de Péndulo Doble Invertido

Para nuestro sistema de péndulo doble invertido consideramos las siguientes definiciones:

- E_k = energía del sistema
- E_p = energía potencial del sistema
- U = Fuerza externa aplicada. Ley de control
- m_0 = masa carrito
- g = aceleración de gravedad
- m_1 = masa primer péndulo
- I_1 = momento de inercia primer péndulo respecto de su eje de rotación = $\frac{1}{12}m_1L_1^2$
- $L_1 = 2l_1$ = longitud primer péndulo
- θ = desplazamiento angular del primer péndulo respecto de la vertical
- m_2 = masa segundo péndulo
- I_2 = momento de inercia segundo péndulo respecto de su eje de rotación = $\frac{1}{12}m_2L_2^2$
- $L_2 = 2l_2$ = longitud segundo péndulo
- θ = desplazamiento angular del segundo péndulo respecto de la vertical

2.2.- Ecuaciones dinámicas del péndulo doble invertido

En nuestro caso procederemos a obtener el modelo matemático del péndulo doble invertido a partir de las leyes físicas que gobiernan la dinámica de su movimiento. Para ello procederemos a encontrar la energía cinética y la energía potencial del sistema, a partir de las cuales obtenemos el Lagrangiano para luego aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange, que nos proporcionaran las ecuaciones diferenciales ordinarias que nos permitirán deducir el comportamiento dinámico del sistema de péndulo doble invertido. Por tanto:

$$E_k = E_{k_0} + E_{k_1} + E_{k_2} \quad (1)$$

$$E_p = E_{p_0} + E_{p_1} + E_{p_2} \quad (2)$$

Donde:

$$E_{k_0} = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \quad \text{Energía cinética del carrito}$$

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \quad \text{Energía cinética traslación y angular brazo 1}$$

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \quad \text{Energía cinética traslación y angular brazo 2}$$

$$E_{p_0} = 0 \quad \text{Energía potencial carrito} = 0$$

$$E_{p_1} = m_1 g y_1 \quad \text{Energía potencial brazo 1}$$

$$E_{p_2} = m_2 g y_2 \quad \text{Energía potencial brazo 2}$$

$$\mathbf{V}_0(t) \quad \text{Velocidad de traslación del carrito}$$

$$\mathbf{V}_1(t) \quad \text{Velocidad de traslación brazo 1}$$

$$\mathbf{V}_2(t) \quad \text{Velocidad de traslación brazo 2}$$

$$\mathbf{W}_1(t) \quad \text{Velocidad angular del brazo 1}$$

$$\mathbf{W}_2(t) \quad \text{Velocidad angular del brazo 2}$$

$$y_1(t) \quad \text{Posición vertical del brazo 1}$$

$$y_2(t) \quad \text{Posición vertical del brazo 2}$$

En la Figura 2.2 podemos ver un esquema simple del péndulo doble invertido y las variables a considerar para dicho cálculo. Así tenemos:

$$x_0(t) \quad \text{Posición horizontal del carrito}$$

$$y_0(t) \quad \text{Posición vertical del carrito}$$

$$x_1(t) \quad \text{Posición horizontal del brazo 1}$$

$$y_1(t) \quad \text{Posición vertical del brazo 1}$$

$$x_2(t) \quad \text{Posición horizontal del brazo 2}$$

$$y_2(t) \quad \text{Posición vertical del brazo 2}$$

$$\theta_1(t) \quad \text{Posición angular brazo 1}$$

$$\theta_2(t) \quad \text{Posición angular brazo 2}$$

$$\dot{x}_0(t) \quad \text{Velocidad horizontal del carrito}$$

$$\dot{y}_0(t) \quad \text{Velocidad vertical del carrito}$$

$$\dot{x}_1(t) \quad \text{Velocidad horizontal del brazo 1}$$

$$\dot{y}_1(t) \quad \text{Velocidad vertical del brazo 1}$$

$$\dot{x}_2(t) \quad \text{Velocidad horizontal del brazo 2}$$

$$\dot{y}_2(t) \quad \text{Velocidad vertical del brazo 2}$$

$$\dot{\theta}_1(t) = \omega_1(t) \quad \text{Velocidad angular del brazo 1}$$

$$\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t) \quad \text{Velocidad angular del brazo 2}$$

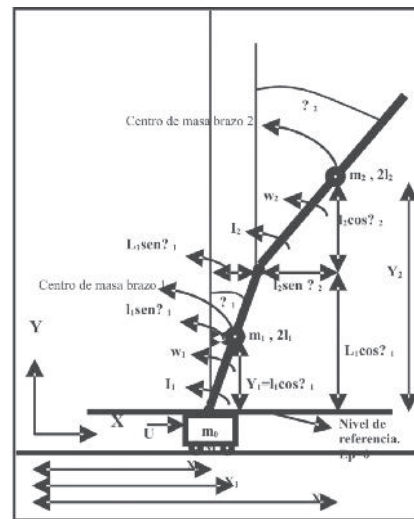


Figura 2.2: Sistema del péndulo doble invertido montado en un carrito.

La energía cinética total del sistema de doble péndulo invertido es:

$$E_k = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 [(\dot{x}_0(t) + l_1 \dot{\theta}_1(t) \cos \theta_1(t))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1(t) \sin \theta_1(t))^2] + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 [(\dot{x}_0(t) + l_1 \dot{\theta}_1(t) \cos \theta_1(t) + l_2 \dot{\theta}_2(t) \cos \theta_2(t))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1(t) \sin \theta_1(t) + l_2 \dot{\theta}_2(t) \sin \theta_2(t))^2] + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2(t) \quad (3)$$

La energía potencial total del sistema de doble péndulo invertido es:

$$E_p = m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (4)$$



2.3.- Ecuaciones de Euler-Lagrange

Obtenida la energía cinética y la energía potencial del sistema, procedemos a encontrar el Lagrangiano. El Lagrangiano se define como:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = E_k - E_p \quad (5)$$

Donde $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ son las coordenadas generalizadas del sistema de péndulo doble invertido definidas como:

El lagrangiano para el sistema del péndulo doble invertido se define como:

$$\begin{aligned} L(q(t), \dot{q}(t)) = & \frac{1}{2} m_0 \dot{q}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 [(\dot{q}_0(t) + l_1 \dot{q}_1(t) \cos q_1(t))^2 \\ & + (l_1 \dot{q}_1(t) \operatorname{sen} q_1(t))^2] + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2(t) \\ & + \frac{1}{2} m_2 [(\dot{q}_0(t) + L_1 \dot{q}_1(t) \cos q_1(t) + l_2 \dot{q}_2(t) \cos q_2(t))^2 \\ & + (L_1 \dot{q}_1(t) \operatorname{sen} q_1(t) + l_2 \dot{q}_2(t) \operatorname{sen} q_2(t))^2] \\ & + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2(t) - m_1 g l_1 \cos q_1 - m_2 g (L_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2) \end{aligned} \quad (5)$$

Las ecuaciones diferenciales de primer orden que describen el comportamiento dinámico del sistema las obtenemos a partir de las derivadas respecto de los vectores $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ y respecto del tiempo del Lagrangiano, es decir calculando las ecuaciones de Euler - Lagrange e igualándolas a las fuerzas y momentos generalizados aplicados al sistema: ($Q = U + F$).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en notación vectorial están definidas como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q = U + F \quad (7)$$

Donde, $L = E_k - E_p$, $U = [u \ 0 \ 0]^T$ y

$$F = [-\operatorname{sgn}(\dot{q}_0) \mu_{q_0} N - \operatorname{sgn}(q_1) B_1 \dot{q}_1 - \operatorname{sgn}(q_2) B_2 \dot{q}_2]^T$$

Donde, u es la entrada de control (ley de control), F es el término de fricción viscosa en cada una de las juntas del sistema de péndulo doble invertido. μ_{q_0} es la constante de fricción de coulomb, N la normal al sistema de péndulo doble invertido, B_1 constante de fricción viscosa en la junta carrito - primer péndulo y B_2 constante de fricción viscosa en la junta primer péndulo - segundo péndulo.

Por consiguiente las ecuaciones de Euler - Lagrange quedan como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_0} = & (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{q}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{q}_1 \cos q_1 \\ & + m_2 l_2 \ddot{q}_2 \cos q_2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \dot{q}_1^2 \operatorname{sen} q_1 \\ & - m_2 l_2 \dot{q}_2^2 \operatorname{sen} q_2 = u - \operatorname{sgn}(\dot{q}_0) \mu_{q_0} N \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = & (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{q}_1 \\ & + m_2 L_1 l_2 \ddot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) + m_2 L_1 l_2 \dot{q}_2^2 \operatorname{sen}(q_1 - q_2) \\ & - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \operatorname{sen} q_1 = -\operatorname{sgn}(\dot{q}_1) B_1 \dot{q}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = & m_2 l_2 \ddot{q}_0 \cos q_2 + m_2 L_1 l_2 \ddot{q}_1 \cos(q_1 - q_2) \\ & + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{q}_2 - m_2 L_1 l_2 \dot{q}_1^2 \operatorname{sen}(q_1 - q_2) \\ & - m_2 l_2 g \operatorname{sen} q_2 = -\operatorname{sgn}(\dot{q}_2) B_2 \dot{q}_2 \end{aligned}$$

En forma matricial compacta:

$$M(q) \ddot{q} + N(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = Q(q, \dot{q}) u \quad (8)$$

Donde:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_0 & M_2 \cos q_1 & M_2 \cos q_2 \\ M_2 \cos q_1 & M_1 & M_2 \cos(q_1 - q_2) \\ M_2 \cos q_2 & M_2 \cos(q_1 - q_2) & M_6 \end{bmatrix}$$

$M(q)$: Es una matriz simétrica y no singular y es llamada matriz de masa generalizada del sistema.

$$N(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -M_2 \dot{q}_1 \operatorname{sen} q_1 & -M_2 \dot{q}_2 \operatorname{sen} q_2 \\ 0 & \operatorname{sgn}(\dot{q}_1) L_1^2 & M_2 \dot{q}_2 \operatorname{sen}(q_1 - q_2) \\ 0 & -M_2 \dot{q}_1 \operatorname{sen}(q_1 - q_2) & \operatorname{sgn}(\dot{q}_2) L_2^2 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_1 g \operatorname{sen} q_1 \\ -M_2 g \operatorname{sen} q_2 \end{bmatrix}$$

$$Q(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = u - \operatorname{sgn}(\dot{q}_0) \mu_{q_0} N$$

Con:

$$M_0 = m_0 + m_1 + m_2$$

$$M_2 = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) L_1$$

$$M_1 = m_1 l_1^2 - \frac{1}{2} m_1 L_1^2$$

$$M_4 = m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 - L_1 - \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 \right) L_1^2$$

$$M_5 = m_2 L_1 l_2 = \frac{1}{2} m_2 L_1 L_2$$

$$M_6 = m_2 l_2^2 + I_2 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2$$

$$N = (m_0 + m_1 + m_2) g = M_0 g$$

$M_{(q)}$: Matriz de Inercia generalizada

$N_{(q, \dot{q})}$: Término de Coriolis, explica la variación de la rapidez de los brazos del péndulo por la variación de su posición angular.

$G_{(q)}$: Término gravitacional

$Q_{(q, \dot{q})}$: Matriz de Fuerzas y/o momentos generalizados aplicados.

3. REPRESENTACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS

3.1 Modelo de Estado no lineal

Nos encontramos frente a un sistema no lineal que puede ser descrito por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias, dadas por la ecuación matricial:

$$\dot{q} = -M^{-1} N \dot{q} + M^{-1} Q u - M^{-1} G \quad (9)$$



Representaremos las ecuaciones en una forma compacta no lineal por la ecuación diferencial vectorial de primer grado (ecuaciones de estado no lineales), que en sistemas continuos es de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (10)$$

Donde \mathbf{x} es el vector columna de variables de estado y \mathbf{u} es el vector columna de entradas de control. Para escribir nuestro sistema como (10), elegimos como variables de estado:

$$\mathbf{x} = [q \ \dot{q}]^T \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6$$

Por consiguiente reformularemos las ecuaciones de Euler-Lagrange como un sistema en \mathbb{R}^6 de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, a partir de:

$$\dot{\mathbf{x}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales de primer orden del sistema no lineal de péndulo doble invertido son:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_{1(x,u)} = x_4 \\ \dot{x}_2 &= f_{2(x,u)} = x_5 \\ \dot{x}_3 &= f_{3(x,u)} = x_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= f_{4(x,u)} = \frac{1}{\Delta} [M_2 M_4 M_6 \text{sen}(x_2) - M_2 M_5^2 \cos(x_2 - x_3) \text{sen}(x_2) - M_2 M_4 M_5 \cos(x_2) \text{sen}(x_2 - x_3)] x_5^2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \text{sgn}(x_3) B_1 [M_2 M_6 \cos(x_2) - M_3 M_5 \cos(x_3) \cos(x_2 - x_3)] x_5 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} [M_2 M_4 M_6 \text{sen}(x_2) - M_2 M_5^2 \cos(x_2 - x_3) \text{sen}(x_2) + M_2 M_4 M_6 \cos(x_2) \text{sen}(x_2 - x_3)] x_6^2 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \text{sgn}(x_6) B_2 [M_2 M_5 \cos(x_2) \cos(x_3) - M_3 M_4 \cos(x_3)] x_6 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} [M_2^2 M_4 g \cos(x_2) \text{sen}(x_2) - M_2 M_3 M_5 g \cos(x_2 - x_3) \text{sen}(x_2 - x_3) + M_2^2 M_4 g \cos(x_2) \text{sen}(x_2)] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} [M_4 M_6 - M_5^2 \cos^2(x_2 - x_3)] \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 &= f_{5(x,u)} = -\frac{1}{\Delta} [M_2^2 M_6 \cos(x_2) \text{sen}(x_2) - M_2 M_3 M_5 \cos(x_3) \text{sen}(2x_2 - x_3) + M_1 M_2^2 \cos(x_2 - x_3) \text{sen}(x_2 - x_3)] x_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} \text{sgn}(x_3) B_1 [M_2^2 \cos^2(x_3) - M_1 M_6] x_2 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} [M_2 M_3 M_5 \cos(x_2) \text{sen}(x_2) - M_2^2 M_5 \cos(x_3) \text{sen}(x_2) + M_1 M_2 M_6 \text{sen}(x_2 - x_3)] x_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \text{sgn}(x_6) B_2 [M_2 M_5 \cos(x_2) \cos(x_3) - M_1 M_5 \cos(x_2 - x_3)] x_6 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} [M_1 M_2 M_6 g \text{sen}(x_2) - M_2 M_3^2 g \cos(x_3) \text{sen}(x_2 - x_3) - M_1 M_3 M_5 g \cos(x_2 - x_3) \text{sen}(x_3)] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} [M_2 M_6 \cos(x_2) - M_3 M_5 \cos(x_3) \cos(x_2 - x_3)] \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 &= f_{6(x,u)} = \frac{1}{\Delta} [M_2^2 M_5 \cos(x_2) \text{sen}(x_2) - M_2 M_3 M_4 \cos(x_3) \text{sen}(x_2) + M_1 M_4 M_5 \text{sen}(x_2 - x_3)] x_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \text{sgn}(x_3) B_1 [M_2 M_5 \cos(x_2) \cos(x_3) - M_1 M_5 \cos(x_2 - x_3)] x_2 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} [M_2 M_3 M_5 \cos(x_2) \text{sen}(x_2 - 2x_3) - M_2^2 M_4 \cos(x_3) \text{sen}(x_2) - M_1 M_5^2 \cos(x_2 - x_3) \text{sen}(x_2 - x_3)] x_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \text{sgn}(x_6) B_2 [M_1 M_4 - M_2^2 \cos^2(x_2)] x_6 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} [M_1 M_2 M_5 g \cos(x_2 - x_3) \text{sen}(x_2) - M_2^2 M_5 g \cos(x_2) \text{sen}(x_2 - x_3) - M_1 M_5 M_4 g \text{sen}(x_3)] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta} [M_2 M_5 \cos(x_2) \cos(x_2 - x_3) - M_3 M_4 \cos(x_3)] \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= M_1 M_4 M_6 + 2 M_2 M_3 M_5 \cos(x_2) \cos(x_3) \cos(x_2 - x_3) \\ &\quad - M_2^2 M_4 \cos^2 x_3 - M_1 M_5^2 \cos^2(x_2 - x_3) - M_2^2 M_6 \cos^2 x_2 \end{aligned}$$

Y así las ecuaciones diferenciales en términos de las variables de estado elegidas, se presenta como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \\ f_3(x,u) \\ f_4(x,u) \\ f_5(x,u) \\ f_6(x,u) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R} \quad (12)$$

El sistema del péndulo doble invertido está ahora descrito bajo la forma de la ecuación (10).

3.2 Modelo de Estado Lineal

El modelo de estado representado por las ecuaciones (10) es efectivamente un modelo no lineal, característica común de la mayoría de los sistemas físicos. Cuando disponemos del modelo no lineal de un sistema físico es importante proceder a la linealización del modelo matemático obtenido del sistema.

El proceso de linealizar sistemas no lineales es importante, porque permite aplicar numerosos métodos de análisis lineal que proporcionan información acerca del comportamiento dinámico de los sistemas no lineales.

Los términos no considerados son lo suficientemente pequeños; dado que las variables consideradas sólo se desvían ligeramente de la condición de operación. En nuestro caso estamos interesados en el comportamiento de la ecuación no lineal para una entrada y un estado de operación apenas perturbado de los valores nominales.

Por lo que el sistema se comporta linealmente si lo operamos en un punto apenas perturbado de los valores de referencia o sea cerca de la condición de equilibrio \mathbf{x}_{eq} con $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, tal que satisfaga la ecuación: $\dot{\mathbf{x}}_{\text{eq}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{eq}}, \mathbf{0})$ que es la posición de equilibrio del sistema y obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_4 \\ f_2 &= x_5 \\ f_3 &= x_6 \end{aligned} \quad (13)$$

$$f_4 = \frac{1}{\Delta_I} M_2 g (M_3 M_5 - M_2 M_6) x_2 + \frac{1}{\Delta_I} M_2 g (M_2 M_5 - M_3 M_4) x_3 + \frac{1}{\Delta_I} (M_2 M_6 - M_3 M_5) B_1 x_5 + \frac{1}{\Delta_I} M_3 M_4 - M_2 M_3) B_2 x_6 + \frac{1}{\Delta_I} (M_4 M_6 - M_5^2) \mathbf{u}$$

$$f_5 = \frac{1}{\Delta_I} M_2 g (M_1 M_6 - M_3^2) x_2 + \frac{1}{\Delta_I} M_2 g (M_2 M_3 - M_1 M_5) x_3 + \frac{1}{\Delta_I} (M_3^2 - M_1 M_6) B_1 x_5 + \frac{1}{\Delta_I} M_1 M_5 - M_2 M_3) B_2 x_6 + \frac{1}{\Delta_I} M_3 M_5 - M_2 M_4) \mathbf{u}$$

$$f_6 = \frac{1}{\Delta_I} M_2 g (M_2 M_3 - M_1 M_5) (x_2) + \frac{1}{\Delta_I} M_2 g (M_1 M_4 - M_2^2) x_3 + \frac{1}{\Delta_I} (M_1 M_5 - M_2 M_3) B_1 x_5 + \frac{1}{\Delta_I} M_2^2 - M_1 M_4) B_2 x_6 + \frac{1}{\Delta_I} (M_2 M_5 - M_3 M_4) \mathbf{u}$$

$$\Delta_I = M_1 M_4 M_6 + 2 M_2 M_3 M_5 - M_2^2 M_4 - M_1 M_5^2 - M_2^2 M_6$$



Las salidas del sistema se establecen como:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \tag{14}$$

Quedando de esta forma el sistema lineal totalmente definido a partir de las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}x(t) + \tilde{D}u(t) \end{aligned} \tag{15}$$

Donde:

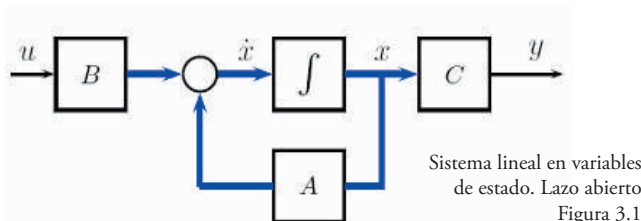
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{11}+a_{12} & a_{13} & 0 & a_{15}+a_{16} & a_{17} \\ 0 & a_{21}+a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25}+a_{26} & a_{27} \\ 0 & -a_{31}-a_{32}+a_{33}+a_{34} & -a_{35}+a_{36} & 0 & -a_{37}-a_{38}+a_{39}+a_{40} & -a_{41}+a_{42} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_{11} \\ b_{21} \\ -b_{31} \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\Delta_1} M_1 g (M_2 M_3 - M_1 M_4) & a_{12} &= \frac{1}{\Delta_1} M_1 g (M_2 M_3 - M_2 M_4) \\ a_{13} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_1 M_4 - M_2 M_3) E_1 & a_{15} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_1 M_4 - M_2 M_3) E_1 \\ a_{21} &= \frac{1}{\Delta_1} M_2 g (M_1 M_4 - M_1^2) & a_{22} &= \frac{1}{\Delta_1} M_2 g (M_2 M_3 - M_2 M_4) \\ a_{23} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_2^2 - M_1 M_4) E_1 & a_{25} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_2 M_3 - M_2 M_4) E_1 \\ a_{31} &= \frac{1}{\Delta_1} M_2 g (M_1 M_3 - M_1 M_4) & a_{32} &= \frac{1}{\Delta_1} M_2 g (M_1 M_4 - M_1^2) \\ a_{33} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_1 M_3 - M_1 M_4) E_1 & a_{34} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_2^2 - M_1 M_4) E_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_1 M_3 - M_1^2) \\ b_{21} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_2 M_3 - M_2 M_4) \\ b_{31} &= \frac{1}{\Delta_1} (M_2 M_3 - M_2 M_4) \end{aligned}$$



3.3.- Parámetros para el ejercicio de simulación del sistema de péndulo doble invertido.

$$m_1=1.0\text{Kg}, m_2=0.4\text{Kg}, m_3=0.2\text{Kg}, L_1=0.2\text{m}, L_2=0.4\text{m}, g=9.8\text{m/s}^2$$

Respecto de la fricción de coulomb y la viscosa estas son importantes para la estabilidad del sistema, además las fricciones no son linealizables. La simulación inicialmente se realizó tomando valores comunes para la fricción de coulomb y la viscosidad y luego a modo de prueba y por comparación se realizó la simulación considerando las fricciones despreciables. Los valores escogidos para estas fricciones fueron:

$$\mu_1 = 0.15, B_2 = B_3 = 0.2 \text{ N-s/m}$$

Relación entre los parámetros del sistema. Para la selección de los valores de parámetros más adecuados para la simulación y validación del sistema de péndulo doble invertido, se hicieron varias pruebas con diferentes valores para tales parámetros, al realizar estas pruebas encontramos algunas relaciones interesantes entre ellos.

- Para el adecuado desempeño de la simulación del sistema de péndulo doble invertido se requiere que siempre sea la masa del primer péndulo (m_1) mayor que la masa del segundo péndulo (m_2).
- Aunque no necesariamente de manera simultanea se requiere para el adecuado desempeño de la simulación del sistema, que la longitud del primer péndulo (L_1) sea menor que la longitud del segundo péndulo (L_2).

Los valores numéricos de las matrices del sistema son:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4.3377 & 0.4820 & 0 & 0.9836 & -0.2459 \\ 0 & 96.3934 & -43.3770 & 0 & -13.5246 & 22.1311 \\ 0 & -115.6721 & 110.8525 & 0 & 1.2295 & -56.5574 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9016 \\ -6.1475 \\ 7.3770 \end{bmatrix}$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$\lambda = [3.43 \quad 1.80 \quad 0 \quad 0 \quad -15.3 \quad -60.0]$$

Matriz de controlabilidad.

$$\text{con} = \begin{bmatrix} 0 & 9.0e^{-1} & -7.8 & 3.8e^{+2} & -2.1e^{+4} & 1.2e^{+6} \\ 0 & -6.1 & 2.5e^{+2} & -1.4e^{+4} & 7.9e^{+5} & -4.7e^{+7} \\ 0 & 7.4 & -4.2e^{+2} & 2.6e^{+4} & -1.6e^{+6} & 9.3e^{+7} \\ 9.0e^{-1} & -7.8 & 3.8e^{+2} & -2.1e^{+4} & 1.2e^{+6} & -7.4e^{+7} \\ -6.1 & 2.5e^{+2} & -1.4e^{+4} & 7.9e^{+5} & -4.7e^{+7} & 2.8e^{+9} \\ 7.4 & -4.2e^{+2} & 2.6e^{+4} & -1.5e^{+6} & 9.3e^{+7} & -5.6e^{+9} \end{bmatrix}$$

El sistema del péndulo doble invertido es inestable, debido a la presencia de dos raíces características positivas. La matriz de controlabilidad es de rango completo por lo tanto el sistema es totalmente controlable.

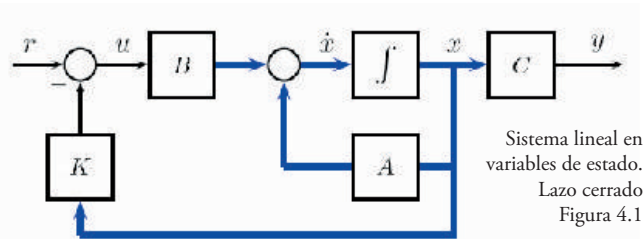
La descomposición en valores singulares de la matriz de controlabilidad, nos da seis valores diferentes de cero, número igual a los estados definidos del sistema.

$$\sigma = [6.2911e^{+9} \quad 7.4713e^{+4} \quad 15.1658 \quad 0.6487 \quad 0.6229 \quad 0.1462]$$

La medida de controlabilidad del sistema linealizado la podemos conocer a partir del número de condición de la matriz de controlabilidad, el cual se obtiene por la razón entre el mayor y el menor valor singular. Esto es; **número de condición de controlabilidad: $4.3028 e^{+10}$** . Entre más grande sea este número [4], [15] menos controlable es el sistema. Este número da una indicación de la dificultad inherente a la estabilización del sistema.

4. CONTROL ÓPTIMO

Para obtener la ley de control, las ecuaciones de Euler-Lagrange se reformularon en un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. El diseño de control óptimo para sistemas no lineales como es el caso del SPDI, requiere por lo general una solución numérica [4] que llega a ser prohibitiva computacionalmente.



4.1 Regulador Linear Cuadrático

El diseño de control óptimo se dirige a estabilizar el SPDI minimizando un funcional de costo cuadrático:

$$J = \int_0^{\infty} L(x, u) dt \quad (16)$$

en donde $L(x, u)$ es una función cuadrática o una función hermitiana de x y u , y producirá la ley de control lineal:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (17)$$

Donde K es una matriz de $p \times n$:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1} & k_{p2} & \dots & k_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y el índice de desempeño cuadrático se obtiene mediante: $J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$ en donde Q es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva (o semidefinida positiva), R es una matriz hermitiana o simétrica real definida positiva y u no está restringida.

El diseño de los sistemas de control óptimo y los sistemas reguladores óptimos basados en tales índices de desempeño cuadráticos se reducen [18] y [19] a la determinación de los elementos de la matriz K . Una ventaja de usar el esquema de control óptimo cuadrático es que el sistema diseñado será estable, excepto en el caso que el sistema no sea controlable.

El sistema de control óptimo se basa en minimizar el índice de desempeño, que para los sistemas con vectores reales y matrices reales, se presenta que:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + R u^2) dt \quad (18)$$

El regulador cuadrático lineal produce una solución óptima cuando la dinámica del sistema es lineal. Como ya vimos el SPDI no es lineal, pero su linealización alrededor del punto de operación escogido, hace posible derivar una solución lineal aproximada para el problema de control óptimo.

La solución continua del LQR se obtiene por: $u(t) = -Kx(t)$ donde: $K = R^{-1} B^T P$, en donde P es la solución de estado estable de la ecuación diferencial de Riccati.

4.2. Determinación de las matrices de ponderación

No existe ciertamente una guía para la selección de las matrices de ponderación Q y R , excepto determinarlas por intuición y experiencia [4], [14] y [20]. En este sentido se realizaron diferentes pruebas con distintos valores para tales matrices, siendo la mejor selección encontrada, la siguiente:

$$Q = \text{diag} [400 \quad 1000 \quad 500 \quad 0 \quad 0 \quad 50]$$

$$R = 2$$

Conviene notar que en la bibliografía consultada nos encontramos con diferentes valores para estas matrices. Por ejemplo en el citado trabajo de Alexander Bogdanov, [20] se ponderan todas las variables de estado con distintos valores diferentes de cero, en tanto que en los trabajos, también citados de J. Rubi, A. Rubio y A. Avello [15] y en el de Eltohamy y Kuo



[4], se ponderan algunas variables de estado con distintos valores diferentes de cero. En todos los casos, las variables ponderadas con valores diferentes de cero son justamente la posición del carrito y la posición del primer y segundo péndulo. Con la selección encontrada obtuvimos por simulación en matlab, la matriz de ganancias siguiente:

$$K = [14.1421 \quad 338.6128 \quad 650.9943 \quad 31.9772 \quad 28.4131 \quad 23.1808]$$

y las raíces en lazo cerrado, siguientes:

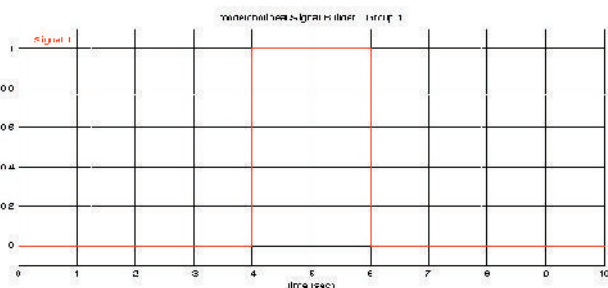
$$\lambda = [-1.74 \pm j1.48 \quad -1.78 \quad -5.49 \quad -13.9 \quad -70.6]$$

La mayor frecuencia encontrada para el sistema es de 70.6 (rad/s).

5. RESULTADOS

5.1. Simulación del sistema en tiempo continuo.

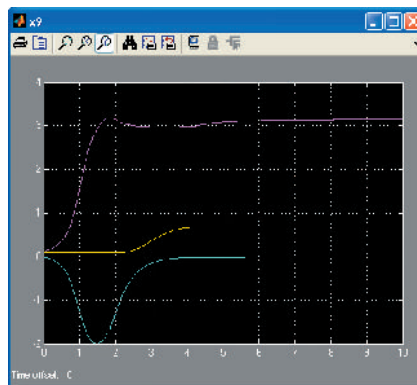
La simulación del sistema de Péndulo Doble Invertido en un carrito, se realizó con el programa Simulink. Las figuras presentadas abajo nos presentan los resultados de esta simulación. Para la simulación del sistema no lineal y lineal, en tiempo continuo, lazo cerrado se utilizó un pulso de duración de 2 segundos como señal de entrada. Figura 5.1.



Pulso de entrada. Figura 5.1

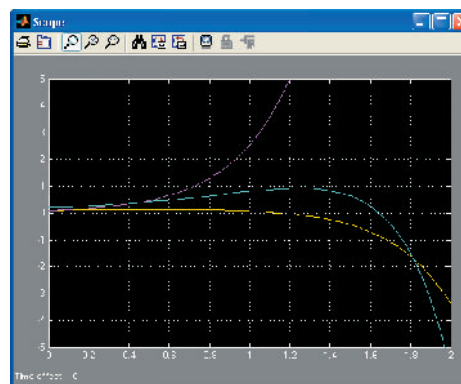
Modelo no lineal en lazo abierto. La figura 5.2 nos enseña el comportamiento del sistema no lineal en lazo abierto. Los integradores en la simulación se ajustaron condiciones iniciales diferentes de cero, es decir se parte de un sistema ligeramente perturbado. A saber: $x(0) = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]$. El tiempo de simulación considerado fue de 10 segundos.

El carrito se mueve a una posición arbitraria pero definida. El péndulo inferior (línea roja) cae hacia π radianes, es decir busca la posición de equilibrio estable (péndulo no invertido) en tanto que el péndulo superior (línea azul) se mueve en dirección contraria al primer péndulo y busca alinearse formando un ángulo de cero grados (0^0) con el primer péndulo. Recuérdese que se está tomando el ángulo del segundo péndulo respecto del primer péndulo.



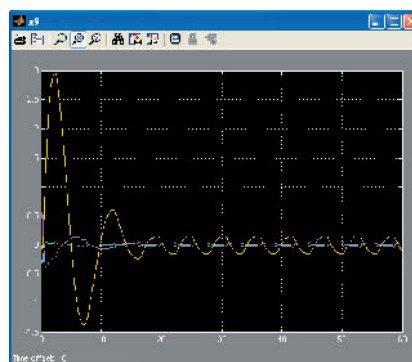
Sistema no lineal en lazo abierto. Figura 5.2

Modelo lineal en lazo abierto. La simulación del sistema linealizado en lazo abierto, figura 5.3, presenta un sistema inestable, siendo evidente después de aproximadamente 200 milisegundos.



Sistema lineal en lazo abierto. Figura 5.3

Modelo no lineal en lazo cerrado. Ahora veamos el sistema en lazo cerrado. La figura 6.4 nos presenta la simulación del comportamiento de las trayectorias del carrito y de cada uno de los péndulos, el inferior y superior, una vez se aplica al sistema no lineal la matriz de ganancias K obtenida en la estabilización óptima del sistema.



Sistema no lineal en lazo cerrado. Figura 5.4

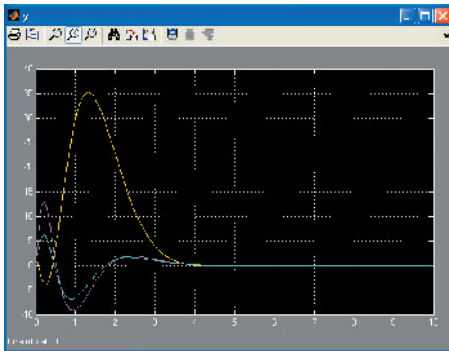
Para la simulación se aplicó un pulso de duración 2 segundos como el mostrado en la figura 6.1 y a los integradores para cada una de las variables de estado se les dieron condiciones iniciales diferentes de cero, así: $\mathbf{x}(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$

De esta manera consideramos el sistema no lineal inicialmente perturbado y simulamos su comportamiento aplicando el regulador lineal cuadrático.

El tiempo que se consideró para la simulación del sistema no lineal en lazo cerrado fue de 60 segundos.

La simulación nos muestra inicialmente un sobrepaso importante en el carrito pero luego de 15 segundos aproximadamente disminuyen la amplitud de sus oscilaciones y se mantiene oscilando a derecha e izquierda garantizando la estabilidad del péndulo. A partir de los 10 segundos, el sistema no lineal alcanza su asentamiento, alrededor del punto de operación considerado.

Modelo lineal en lazo cerrado. La simulación del sistema lineal en lazo cerrado, figura 5.5, presenta un similar comportamiento que en caso del sistema no lineal.



Sistema lineal en lazo cerrado. Figura 5.5.

No obstante para el sistema lineal el asentamiento se presenta aproximadamente a partir de los 4 segundos de simulación. El tiempo que se consideró para la simulación del sistema lineal en lazo cerrado fue de 10 segundos.

5.2. Sistema en Tiempo Discreto.

Como se vio antes la simulación en tiempo continuo en lazo cerrado nos presentó una máxima frecuencia de 70.6 (rad/s). De acuerdo al criterio de nyquist, consideramos un tiempo de muestreo $T_s = 0.001$ s para la discretización del sistema. Respecto de las matrices de ponderación consideramos los mismos valores con los que simulamos el sistema en tiempo continuo.

$$\mathbf{Q} = \text{diag}[400 \ 1000 \ 500 \ 0 \ 0 \ 50] \text{ y } \mathbf{R} = 2$$

Matrices en tiempo discreto. Las matrices del sistema obtenidas una vez la discretización son las siguientes:

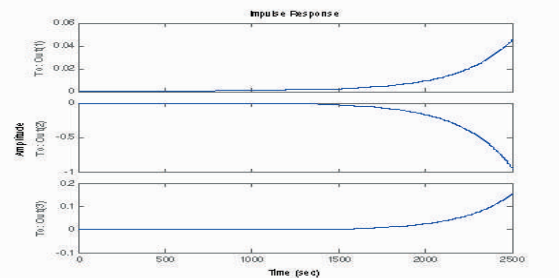
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & -2.1486e^{-4} & 2.2953e^{-7} & 1.0e^{-3} & 4.8883e^{-7} & -1.1703e^{-7} \\ 0 & 1 & -2.1189e^{-5} & 0 & 9.9329e^{-4} & 1.0803e^{-5} \\ 0 & -5.6743e^{-5} & 1 & 0 & 5.8167e^{-7} & 9.7227e^{-4} \\ 0 & -4.2770e^{-3} & 4.4779e^{-4} & 1 & 9.7470e^{-4} & -2.2823e^{-4} \\ 0 & 9.4497e^{-2} & -4.1888e^{-2} & 0 & 9.8663e^{-1} & 2.1350e^{-2} \\ 0 & -1.1241e^{-1} & 1.0775e^{-1} & 0 & 1.1308e^{-3} & 9.4507e^{-1} \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 4.4952e^{-7} \\ -3.0332e^{-6} \\ 3.6188e^{-6} \\ 8.9777e^{-1} \\ -6.0265e^{-7} \\ 7.1689e^{-3} \end{bmatrix}$$

Los valores obtenidos por simulación en matlab de la matriz de ganancias para la estabilización del sistema en tiempo discreto, son los siguientes:

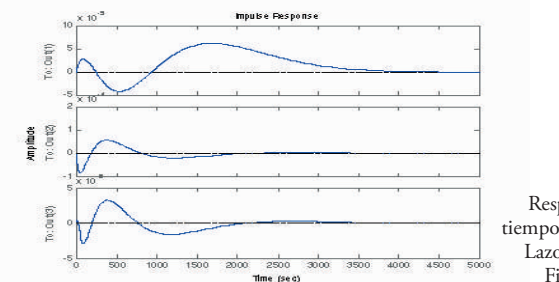
$$\mathbf{K} = [13.9653 \ 334.3388 \ 643.5271 \ 31.5844 \ 28.0649 \ 22.8717]$$

Sistema discreto en lazo abierto. La simulación del sistema en tiempo discreto como se aprecia en la figura 5.6 nos enseña el sistema inestable.



Respuesta en tiempo discreto. Lazo abierto. Figura 5.6.

Sistema discreto en lazo cerrado. En lazo cerrado la simulación del sistema en tiempo discreto, figura 5.7, manifiesta un comportamiento similar al de tiempo continuo, en cuanto al hecho que inicialmente se presentan ligeras oscilaciones del carrito y de los dos péndulos, pero luego después de aproximadamente 3500 instantes de muestreo, el sistema alcanza su asentamiento alrededor del punto de operación determinado.



Respuesta en tiempo discreto. Lazo cerrado. Figura 5.7.



5.3 Simulación del sistema del péndulo doble invertido con fricción despreciable

La simulación del sistema de péndulo doble invertido montado en un carrito, considerando las fricciones de coulomb y viscosa despreciables, presenta resultados similares a los anteriores tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto. Por supuesto varían los tiempos de establecimiento y las condiciones de oscilación de los péndulos, en especial en la simulación del sistema no lineal y lineal en lazo cerrado. Los resultados de esta simulación se presentan igualmente en este trabajo.

6. CONCLUSIONES

1. La estrategia de control que seguimos para la estabilización del SPDI, de control óptimo fue una acertada elección, aunque presentó distintas dificultades, en particular en cuanto al modelamiento matemático, la elección de las matrices de ponderación del funcional de costo cuadrático y la determinación de los mejores valores de los parámetros de simulación particularmente los de las fricciones de coulomb y viscosa.
2. Los resultados obtenidos tanto en para el sistema linealizado como para el sistema no lineal y tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto son adecuados y por lo menos en la simulación nos presentan una estabilización del sistema adecuada.
3. El modelamiento matemático obtenido del sistema es valido y se concilia de manera importante y acertada, con los modelos matemáticos encontrados en la bibliografía consultada.
4. La simulación del sistema no lineal en lazo abierto en tiempo continuo, valida adecuadamente el modelo matemático y permite predecir la dinámica del sistema no lineal con suficiente precisión.
5. El trabajo realizado interviene en lo que es modelamiento, control y simulación de sistemas y resulta para la Universidad en una importante contribución en la introducción al estudio de los sistemas de péndulos invertidos.
6. En nuestro caso no se consideró la necesidad de diseñar observadores de estado, en particular porque el sistema siendo completamente observable tanto en tiempo continuo, como en tiempo discreto, todos los estados del sistema son medibles.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Yamakita, K. Nonaka, Y. Sugahara, K. Furuta, Robust state transfer control of double pendulum,” IFAC *Symposium Advances in Control Education 1994* (ACE’94), Tokyo, Japan, pp. 205 - 208, 1995.
- [2] A. Bradshaw, J. Shao, Swing up control of inverted pendulum systems,” *Robotica*, vol. 14, pp. 397 - 405, 1996.
- [3] SAHBA. M.: ‘Computer-aided design of feedback controllers for nonlinear systems with applications to control of a double-inverted pendulum’, *IEE Proc D*, 1983,130, (6), pp 350-358.
- [4] ELTOHAMY, K G , and KUO, C Y. ‘Real time stabilization of a triple link inverted pendulum using single control input’, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 1997, 144, (5), pp. 498-504.
- [5] FURUTA, K., YAMAKITA, M., and KOBAYASHI, S.: ‘Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback’, *J. Syst. Control Eng.*, 1992, 206, pp. 263-269
- [6] WJCKLUND, M., KRISTENSON, A., and ASTROM, K.J.: ‘A new strategy for swinging up an inverted pendulum’. *Proceedings of IFAC 12th World Congress*, 1992, Vol. 9, pp. 151-154.
- [7] ASTROM, K.J., and FURUTA, K.: ‘Swinging up a pendulum by energy control’. *IFAC 13th World Congress*, San Francisco, California, 1996.
- [8] SCHERM, N., and HEIMANN, B.: ‘Dynamics and control of underactuated manipulation systems: A discrete-time approach’, *Robot. Auton. Syst.* 2000, 30, pp. 237-248
- [9] BERGEMAN, M., LEE, C., and XU, Y.: ‘Experimental study of an underactuated manipulator’. *Proceedings of 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent robots and systems*, Pittsburgh, USA, August 1995, Vol. 2; pp. 317-322.
- [10] BERGEMAN, M., and XU, Y.: ‘Optimal control sequence for underactuated manipulators’. *Proceedings of 1996 International Conference on Robotics and automation*, Minneapolis, USA, 1996, pp. 3714-3719.
- [11] SPONG, M.W.: ‘The swing up control problem for the Acrobot’, *IEEE Control Syst. Mag.*, 1995, 15, pp. 49-55
- [12] SPONG, M.W., and BLOCK, D.J.: ‘The Pendubot: a mechatronic system for control research and education’. *34th IEEE Conference on Decision and control*, New Orleans, USA, December 1995, pp. 555-556.
- [13] HEIM, A., and VON STRYK, O.: ‘Trajectory optimization of industrial robots with application to computer-aided robotics and robot controllers’ *Optimization*, 2000, 47, pp. 407-420.
- [14] WANG, C.-YE., TIMOSZYK, W.K., and BOBROW, J.E.: ‘Weightlifting motion planning for a Puma

- 762 robot'. Proceedings of 1999 IEEE international conference on Robotics and automation, Detroit, Michigan, 1999, pp. 480-485.
- [15] J. RUBI, A. RUBIO and A. AVELLO. 'Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum' IEE Proceedings - Control Theory and Applications - March 2002 - Volume 149, Issue 2, p. 169-175
 - [16] SOHL, G.A., and BOBROW, J.E.: 'Optimal motions for underactuated manipulators'. Proceedings of DETC'99, ASME Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, Nevada, USA, September 1999
 - [17] KIRK Donald E. Optimal Control Theory. An Introduction. PRENTICE HALL. 1970
 - [18] W. J. GRANTHAM Y T. L. VINCENT. 'Sistemas de control moderno, analisis y diseño'. Limusa. Noriega editores. Primera edición. 1998.
 - [19] KATSUHIKO OGATA. 'Ingeniería de Control Moderna'. Pearson Educación. Prentice may. Tercera edición. 1997.
 - [20] BOGDANOV Alexander. Optimal Control of a Double Inverted Pendulum, Departamento of computer science & Electrical Engineering OGI School of Science & Engineering. OHSU. Technical Report CSE-04-006. December 2004.

